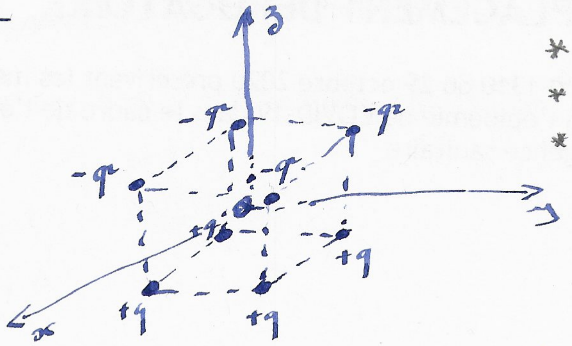
CC1. Mai 2021

Exercice 1

1°)



* énoncé incompris (0)
* énoncé compris, dessin pas clair (0,5)
* énoncé compris, dessin clair (1)

2°) a) (xOz) est un plan de symétrie donc $E \in (xOz)$ * (0,5) si les dépendances sont fausses

$\vec{E}(P) = E_x(x,z)\vec{e_x} + E_z(x,z)\vec{e_z}$ * (1) si OK

b) (xOy) est un plan d'anti-symétrie donc $E \perp (xOy)$

$\vec{E}(P) = E_z(x,y)\vec{e_z}$ * (0,5) si les dépendances sont fausses * (1) si OK

c) Au point O $\vec{E}(O) = E_z\vec{e_z}$ avec $E_z > 0$ * (1)

c'est le point où le champ est maximal. * 0 si $\vec{E}(O) = \vec{0}$

Exercice 2

1°) invariance par rotation autour de z (0,5) → coord. cylindriques (0,5)

2°) a) le plan contenant M et l'axe z est un plan de symétrie

donc $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan * (0,5) si les invariances sont fausses

$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}$ * (1) si OK

b) le plan (xOy) est plan de symétrie ; il se rajoute au précédent

donc $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$ * (0,5) si dépendances fausses * (1) si OK

c) Tous les plans contenant l'axe z sont plans de symétrie

donc $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e_z}$ * (0,5) si dépendances fausses * (1) si OK

d) O est dans le plan (xOy) et sur l'axe z donc $\vec{E}(O) = \vec{0}$ (1)

3°) a) $dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$ (1)

b) $V = \int_R^{R+a}\int_0^{2\pi}\int_{-a/2}^{+a/2} r\, dr\, d\theta\, dz$ (1)

c) $V = \left[\frac{r^2}{2}\right]_R^{R+a} \cdot 2\pi \cdot a = \pi a \left[(R+a)^2 - R^2\right]$

$V = \pi a^2 (2R+a)$ (1)

Exercice 3

1°) $\text{div}\,\vec{V} = +Ky\,2x\,(x^2+y^2)^{-2} - Kx\,2y\,(x^2+y^2)^{-2} = 0$ 2

2°) $\vec{e_x} = \cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}$ donc $\vec{e_y} = \sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$ $\quad\vec{e_x} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$

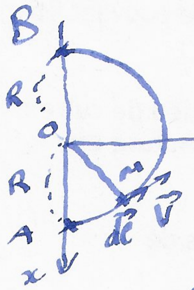
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

si $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ sont corrects 1

donc $\vec{V} = \dfrac{-Kr\sin\theta}{r^2}(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) + \dfrac{Kr\cos\theta}{r^2}(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta})$ 2

donc $\vec{V} = \dfrac{K\sin^2\theta}{r}\vec{e_\theta} + \dfrac{K}{r}\cos^2\theta\,\vec{e_\theta}$ donc $\vec{V} = \dfrac{K}{r}\vec{e_\theta}$

3°)



$d\mathcal{C}_1 = \dfrac{K}{R}\vec{e_\theta} \cdot R\,d\theta\,\vec{e_\theta} = K\,d\theta$

si $\vec{dl}$ est correct 1

$\mathcal{C}_1 = \int_0^{\pi} K\,d\theta = K\pi$ 2

$\vec{rot}\,\vec{V} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\cdot\frac{K}{r})}{\partial r}\vec{e_z} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(K)}{\partial r}\vec{e_z} = 0\cdot\vec{e_z}$

$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$ 1

4°)

5°) $\text{div}\,\vec{V} = 0$ donc $\vec{V}$ est à flux conservatif → 0,5

$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$ donc $\vec{V}$ est à circulation conservative → 0,5

donc $\vec{V}$ est à flux et à circulation conservatives.